Superfici di Coons

Bonomi Paolo

10 Gennaio, 2023

Contenuti

Lista delle immagini

1 Superfici di Coons

1.1 Introduzione

Le superfici di Coons sono nate dalle necessità indotte dal settore automobilistico. Devono il loro nome al loro inventore Steven Anson Coons. Oggi vengono utilizzate sia nella modellazione geometrica sia nel metodo degli elementi finiti.

La differenza principale tra le superfici di Coons e quelle di Bézier è che le prime al fine di creare la superficie vanno a riempire una rete di curve, senza l'uso di un poliedro di controllo. Quindi un designer non penserà in termini di superfici, ma in termini di curve tra cui la superficie giacierà in modo completamente naturale.

1.1.1 Superfici rigate

Le superfici rigate risolvono il seguente problema: date due curve c_1 e c_2 definitie entrambe nello stesso intervallo $u \in [0, 1]$ trovare una superficie $\boldsymbol{x}$ in modo tale che essa contenga entrambe le curve come l'una opposta all'altra. In altre parole trovare $\boldsymbol{x}$ tale che:

$$\boldsymbol{x}(u, 0) = c_1(u), \quad \boldsymbol{x}(u, 1) = c_2(u) \tag{1.1}$$

una soluzione è la seguente:

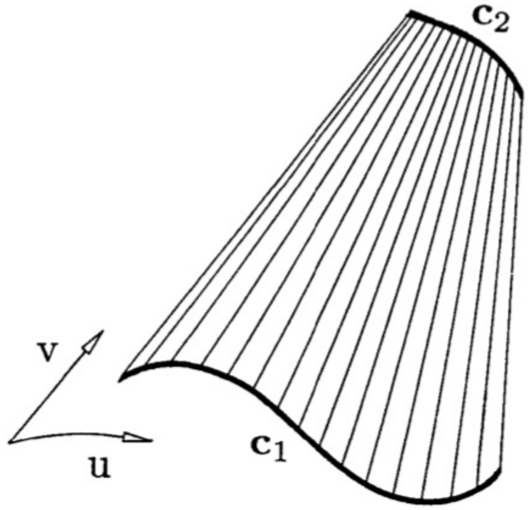

Figure 1.1: Superficie rigata definita da due curve c_1 e c_2 definitie in modo arbitrario. La superficie si forma tramite interpolazione lineare

$$\boldsymbol{x}(u, v) = (1 - v)\boldsymbol{x}(u, 0) + v\boldsymbol{x}(u, 1) \tag{1.2}$$

Si noti che l'interpolazione è di curve, non di punti discreti. Per questo motivo questa operazione prende il nome di *Transfinite interpolation.*

Le curve che definiscono una superficie rigata tramite l'equazione 1.2 non hanno virtualmente nessuna restrizione se non che debbano essere definitie nello stesso intervallo parametrico (una delle due curve potrebbe essere cubica polinomiale, l'altra una spline o addiriturra poligonali).

Sottolineamo che l'equazione (1.2) fornisce una definizione parametrica della superficie. Non esprime un superficie in forma chiusa. Le superfici di Coons,

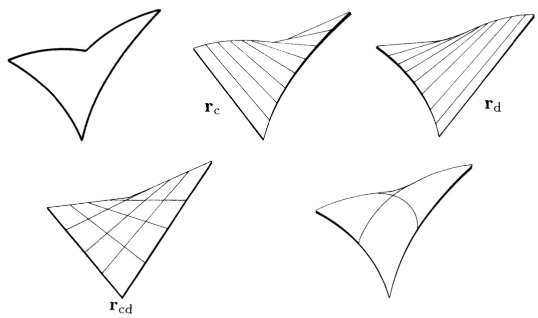

Figure 1.2: Una superficie di Coons é composta da due superfici rigate e da una superficie bilineare. La prima immagine in alto a sinistra mostra le curve di contorno

definite tramite l'utilizzo di superfici rigate, ereditano questa proprietà.

1.2 Mix bilineare

Una superficie di Coons applica una interpolazione tra quattro curve di contorno. Più precisamente risolve il seguente problema: date quattro curve arbitrarie $c_1(u)$, $c_2(u)$, $d_1(v)$, $d_2(v)$ definite su $u \in [0,1]$ e $v \in [0,1]$ trovare una superficie $\boldsymbol{x}$ che è racchiusa da queste 4 curve:

$$\boldsymbol{x}(u,0) = c_1(u), \quad \boldsymbol{x}(u,1) = c_2(u) \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{x}(0,v) = d_1(v) \quad \boldsymbol{x}(1,v) = d_2(v) \tag{1.4}$$

Le quattro curve definiscono due superfici rigate (mostrate nella figura 1.2):

$$\boldsymbol{r}_c(u,v) = (1-v)\boldsymbol{x}(u,0) + v\boldsymbol{x}(u,1) \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{r}_d(u,v) = (1-u)\boldsymbol{x}(0,v) + u\boldsymbol{x}(1,v) \tag{1.6}$$

E' chiaro che la superficie r_c interpola correttamente le curve c_1 e c_2 ma nnn riproduce d_1 e d_2. La situazione è simile per quanto riguarda r_d. La strategia impiegata è quindi la seguente: mantenere le caratteristiche di interpolazione corrette e scartare quelle scorrette.

Gli errori di interpolazione sono catturati dalla superficie r_{cd} che è l'interpolante bilineare dei quattro angoli.

$$\boldsymbol{r}_{cd}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(0,0) & \boldsymbol{x}(0,1) \\ \boldsymbol{x}(1,0) & \boldsymbol{x}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Quindi possiamo definire una superficie di Coons in questo modo:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_d - \boldsymbol{r}_{cd} \tag{1.8}$$

riscriviamo $\boldsymbol{r}_c$ e $\boldsymbol{r}_d$

$$\boldsymbol{r}_c = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(0,v) \\ \boldsymbol{x}(1,v) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{r}_d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(u,0) & \boldsymbol{x}(u,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(0,v) \\ \boldsymbol{x}(1,v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(u,0) & \boldsymbol{x}(u,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(0,0) & \boldsymbol{x}(0,1) \\ \boldsymbol{x}(1,0) & \boldsymbol{x}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Quindi è chiaro che una superficie di Coons è definita come *Bilinearly Blended* poichè una superficie rigata "mixa" le due curve che la definiscono. Le funzioni di mix sono $f_1(v) = 1 - v,\ f_2(v) = v$ e $g_1(u) = 1 - u,\ g_2(u) = u$ ed è chiaramente possibile utilizzarne di diverse. L'unica restrizione è che ogni coppia di funzioni deve avere somma sempre pari a 1 e inoltre si deve avere $f_1(0) = g_1(0) = 1$ e $f_1(1) = g_1(1) = 0$. Se le due funzioni sono monotone decrescenti la toppa avrà una forma facilmente predicibile.

1.2.1 Mix cubico

Tengo a precisare che l'applicazione, fornita in aggiunta a questo documento, non comprenderà i seguenti capitoli. I quali sono stati integrati al solo fine di completare le mie conoscenze personali riguardanti l'argomento.

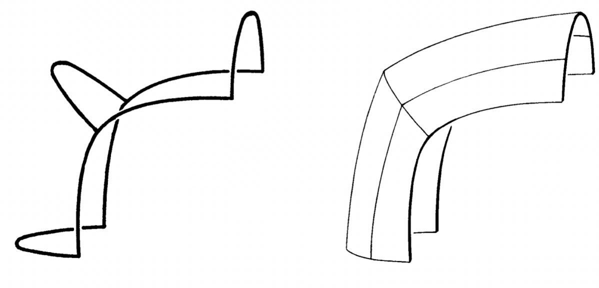

Figure 1.3: A sinistra osserviamo le curve di contorno. A destra si nota che utilizzando un mix bilineare le due toppe di Coons formano una superficie non regolare

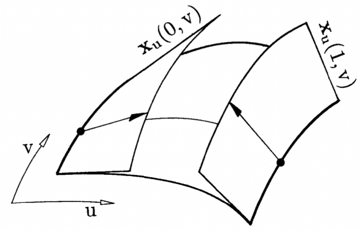

Figure 1.4: Nastri tangenti: in questa immagine ne sono mostrati solo due su quattro totali.

Le toppe di Coons bilinearly blended hanno però un problema: si può notare, unendo più patch assieme, che le derivate ai bordi sono discontinue (figura 1.2.1).

Al fine di eliminare questo problema è necessario modificare le funzioni di mix. Ad esempio è possibile utilizzare i polinomi cubici di Hermite, questo però significa che dobbiamo fornire, oltre alle curve di contorno, anche le derivate inter-contorno (nastri tangenti) appunto sulle curve stesse (figura 1.2.1). Ricapitolando come dati abbiamo le curve (equazioni 1.3 e 1.4), in aggiunta alle loro derivate.

$$\boldsymbol{x}_v(u,0), \quad \boldsymbol{x}_v(u,1), \boldsymbol{x}_u(0,v), \quad \boldsymbol{x}_u(1,v) \tag{1.12}$$

L'aggiunta dei polinomi cubici di Hermite nella definizione di sup. di Coons (equazione 1.8) è la seguente e definisce le cosiddette superficiedi Hermite:

$$\boldsymbol{h}_c(u,v) = H_0^3(u)\boldsymbol{x}(0,v) + H_1^3(u)\boldsymbol{x}_u(0,v) + H_2^3(u)\boldsymbol{x}_u(1,v) + H_3^3(u)\boldsymbol{x}(1,v) \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{h}_d(u,v) = H_0^3(v)\boldsymbol{x}(u,0) + H_1^3(v)\boldsymbol{x}_v(u,0) + H_2^3(v)\boldsymbol{x}_v(u,1) + H_3^3(v)\boldsymbol{x}(u,1) \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{cd}(u,v) = &\begin{bmatrix} H_0^3(u) & H_1^3(u) & H_2^3(u) & H_3^3(u) \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(0,0) & \boldsymbol{x}_v(0,0) & \boldsymbol{x}_v(0,1) & \boldsymbol{x}(0,1) \\ \boldsymbol{x}_u(0,0) & \boldsymbol{x}_{uv}(0,0) & \boldsymbol{x}_{uv}(0,1) & \boldsymbol{x}_u(0,1) \\ \boldsymbol{x}_u(1,0) & \boldsymbol{x}_{uv}(1,0) & \boldsymbol{x}_{uv}(1,1) & \boldsymbol{x}_u(1,1) \\ \boldsymbol{x}(1,0) & \boldsymbol{x}_v(1,0) & \boldsymbol{x}_v(1,1) & \boldsymbol{x}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^3(v) \\ H_1^3(v) \\ H_2^3(v) \\ H_3^3(v) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.15}$$

Si noti che la sottomatrice $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{uv}(0,0) & \boldsymbol{x}_{uv}(0,1) \\ \boldsymbol{x}_{uv}(1,0) & \boldsymbol{x}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$ (della matrice nell' equazione 1.15) è composta da vettori che si chiamano abitualmente : vettori di twist.

Queste quantità devono essere fornite in input nella definizione della superficie: la soluzione più popolare (detta di Ferguson) è quella di scegliere questi vettori tutti nulli.

1.2.2 Utilizzo pratico

Ora verrà fornito un esempio pratico dove si utilizzeranno le superfici cubiche di Hermite per risolvere il problema per cui esse sono state ideate: assumiamo di avere una griglia di curve che vogliamo riempire.

Al fine di applicare l'equazione 1.15 abbiamo bisogno di creare i vettori di twist e i nastri tangenti partendo dall'insieme di curve di contorno. Iniziamo creando i vettori di twist per ogni angolo di ogni singola maglia della griglia.

A tal proposito è possible utilizzare diversi metodi (Ferguson, Adini's twist, Bessel twists, ecc.). Fatto ciò ora dobbiamo solo creare i nastri tangenti. Iniziamo quindi con $\boldsymbol{x}_v(u,0)$ e notiamo subito che il suo valore per $u = 0$ e $u = 1$ lo conosciamo già (inizio e fine della curva di contorno), inoltre notiamo che la derivata in quei punti rispetto ad u è data proprio dai nastri tangenti che abbiamo appena definito. Quindi abbiamo che:

$$\boldsymbol{x}_v(u,0) = \boldsymbol{x}_v(0,0)H_0^3(u)+\boldsymbol{x}_{uv}(0,0)H_1^3(u)+\boldsymbol{x}_{uv}(1,0)H_2^3(u)+\boldsymbol{x}_v(1,0)H_3^3(u) \quad (1.16)$$

I restanti tre nastri tangenti vengono definiti in modo analogo. Abbiamo quindi trovato il modo per formare una superficie che appunto riempie l'insieme di curve dato in input, è bastato stimare i vettori di twist negli angoli di ogni singola maglia.